Quadratische Funktionen

1. **Welche Realsituationen gibt es, die sich durch die Funktionsklasse  
   beschreiben lassen?**

Quadratische Funktionen modellieren alle Situationen, in denen eine Größe nicht linear, sondern beschleunigt wächst oder fällt, und man Extremwerte (Maximum/Minimum) bestimmen will.

z. B.

* Freier Fall
* Würfe, Sprünge
* Kosten und Gewinn
* Architektur (Brückenbögen, …)
* Rampen
* Wasserfontänen

1. **Wie sieht der einfachste Vertreter dieser Klasse aus?**
2. **Wie sieht der Funktionsterm einer Funktion dieser Klasse aus?**

mit a, b, c∈ und a ≠ 0

1. **Kann er in verschiedenen Formen geschrieben werden?**

Ja.

Scheitelpunktform: Scheitelpunkt:

Faktorisierte Form (Nullstellenform):

1. **Wenn ja, welche Vor- und Nachteile haben diese verschiedenen  
   Formen?**

Scheitelpunktform:

Vorteile

* Scheitelpunkt sofort ablesbar
* Öffnung und Lage klar erkennbar

Nachteile

* Nullstellen nicht direkt sichtbar
* Umrechnung in allgemeine Form erfordert Ausmultiplizieren
* Zahlen wirken manchmal „komplizierter“ als in der allgemeinen Form

Nullstellenform:

Vorteile

* Nullstellen sofort sichtbar
* Sehr praktisch, wenn Nullstellen gegeben sind
* Gut für schnelle Skizzen und Schnittpunkte mit der x-Achse
* Leicht auszumultiplizieren

Nachteile

* Nur möglich, wenn Nullstellen existieren (und reell sind)
* Scheitelpunkt nicht direkt erkennbar
* Y-Achsenabschnitt muss berechnet werden

1. **Welche Bedeutung haben die Parameter im Funktionsterm?**

* bestimmt die Öffnung der Parabel
  + → Parabel öffnet sich nach oben
  + → Parabel öffnet sich nach unten
  + groß → schmale Parabel
  + klein → breite Parabel
* beeinflusst die Lage des Scheitels (links/rechts)
* ist der y-Achsenabschnitt

1. **Wie können die Bedeutungen dieser Parameter veranschaulicht/begründet werden?**

Parameter a: Anschauliche Bedeutung

* bestimmt, wie stark die Parabel gekrümmt ist.
* Je größer , desto steiler / schmaler die Parabel.
* Je kleiner , desto breiter die Parabel.

Begründung

Der Wert von gibt an, wie schnell die Funktionswerte wachsen.

* Bei wächst der Wert schneller als bei .
* Bei negativem werden alle y-Werte negativ, also spiegelt sich die Parabel an der x-Achse.

Parameter b: Anschauliche Bedeutung

* verschiebt die Parabel seitlich (links/rechts).
* Dadurch liegt der Scheitel nicht mehr bei .

Begründung

Der Term beeinflusst die Steigung der Parabel an der y-Achse.

* Wenn , kippt die Parabel nach links (Scheitel wandert nach links).
* Wenn , kippt sie nach rechts.

Parameter c: Anschauliche Bedeutung:

* c ist der Punkt, wo die Parabel die y-Achse schneidet.  
  Also:

Begründung:

* Setzt man ein, fällt alles außer weg.

1. **Wie sieht der typische Graph einer Funktion der Klasse aus?**

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Je nach Funktionsterm sieht sie unterschiedlich aus.

1. **Welche charakteristischen Eigenschaften haben die Funktionen  
   dieser Klasse?**

Graph

* bilden immer eine Parabel,
* sind achsensymmetrisch zur Scheitelachse,
* haben genau einen Scheitelpunkt (Minimum oder Maximum),
* können 0, 1 oder 2 Nullstellen haben.

Verhalten

* wachsen links und rechts vom Scheitelpunkt monoton (erst fallend, dann steigend bzw. umgekehrt),
* haben eine quadratische Steigung (Änderung nimmt zu, nicht konstant).

Funktionsgleichung

* immer Form: mit

1. **Wie kann man diese Eigenschaften an Funktionsterm, Tabelle und  
   Graph veranschaulichen/erkennen?**

Im Funktionsterm

* a: Öffnungsrichtung und Breite
* b: Lage der Parabel (Scheitelpunkt verschiebt sich links/rechts)
* c: y-Achsenabschnitt
* Anzahl der Nullstellen aus der Diskriminante erkennbar:
  + : 2 Nullstellen
  + : 1 Nullstelle
  + : keine reellen Nullstellen

In einer Wertetabelle

* Die Werte steigen nicht linear, sondern werden immer schneller größer/kleiner.
* Die Tabelle ist symmetrisch um den Scheitelpunkt.
* Die kleinste oder größte Tabellenzeile zeigt den Scheitel.

Im Graphen

* Parabelform erkennbar
* Der tiefste/höchste Punkt = Scheitel
* Schnitt mit y-Achse = c
* Schnitt(e) mit der x-Achse = Nullstellen
* Symmetrieachse sichtbar

1. **Wo liegt der grundsätzliche Unterschied zu schon vorher behandelten Funktionsklassen?**

Lineare Funktionen:

* Graph ist Gerade
* Steigung ist konstant
* Funktionsgleichung:

Quadratische Funktionen:

* Graph ist Parabel
* Steigung ist veränderlich (nimmt zu oder ab)
* Funktion hat eine Krümmung
* besitzt einen Scheitelpunkt

Kurz:

Lineare Funktionen beschreiben gleichmäßige Veränderungen,  
quadratische Funktionen beschreiben beschleunigte Veränderungen.

1. **Wie kann man aus einem „Prototypen“ einer Funktion dieser Klasse  
   andere Vertreter gewinnen?**

Ein Prototyp ist z. B.   
Aus ihm erhält man jede andere Parabel durch:

* Streckung und Stauchung

→ schmaler oder breiter

* Spiegelung an der x-Achse:
* Verschiebung nach rechts/links:
* Verschiebung nach oben/unten: Allgemein: Mit verschiedenen bekommt man alle Parabeln.

1. **Welche Bedeutung haben Kenntnisse dieser Funktionsklasse für das  
   Lösen von bestimmten Gleichungen?**

Gerade bei Gleichungen der Form: sind quadratische Funktionen entscheidend:

Man braucht sie für:

* Berechnung der Nullstellen → Schnittpunkte mit der x-Achse
* Mitternachtsformel / pq-Formel
* Scheitelpunkt zur Optimierung
* Anwendungen:
  + Wurfparabeln (Physik)
  + Flächenoptimierung
  + Kosten- und Gewinnfunktionen
  + Extremwertprobleme

Warum wichtig?

Jede quadratische Gleichung entspricht dem Problem: Wo schneidet die Parabel die x-Achse?

Mit Kenntnis der Eigenschaften kann man:

* Anzahl der Lösungen vorhersagen
* Lösungen grafisch abschätzen
* Rechenwege einfacher wählen (Faktorisierung, Scheitelpunktform usw.)